

**Matemáticas**  
**Nivel superior**  
**Prueba 3 – Matemáticas discretas**

Miércoles 18 de mayo de 2016 (mañana)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 9]

- (a) Utilice el algoritmo de Euclides para mostrar que 1463 y 389 son primos entre sí. [4]
- (b) Halle números enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que  $1463a - 389b = 1$ . [5]

2. [Puntuación máxima: 12]

En la siguiente tabla se muestra el peso de cada una de las aristas que tiene el grafo completo  $G$ .

	A	B	C	D	E	F
A	-	14	10	8	12	9
B	14	-	9	12	10	13
C	10	9	-	7	8	13
D	8	12	7	-	9	11
E	12	10	8	9	-	11
F	9	13	13	11	11	-

- (a) Empezando en  $A$ , utilice el algoritmo del vecino más próximo y halle para  $G$  un límite superior para el problema del "viajante". [5]
- (b) Empezando por eliminar  $A$ , utilice el algoritmo de vértice borrado y halle para  $G$  un límite inferior para el problema del "viajante". [7]

3. [Puntuación máxima: 10]

A lo largo de esta pregunta,  $(abc\dots)_n$  denota el número  $abc\dots$  escrito en base  $n$ . Por ejemplo,  $(359)_n = 3n^2 + 5n + 9$ .

- (a) (i) Sabiendo que  $(43)_n \times (56)_n = (3112)_n$ , muestre que  $3n^3 - 19n^2 - 38n - 16 = 0$ .  
(ii) A partir de lo anterior, determine el valor de  $n$ . [3]
- (b) Determine el conjunto de valores de  $n$  para los cuales  $(13)_n \times (21)_n = (273)_n$ . [3]
- (c) Muestre que no hay valores posibles de  $n$  para los cuales  $(32)_n \times (61)_n = (1839)_n$ . [4]

4. [Puntuación máxima: 17]

- (a) Resuelva la relación de recurrencia  $v_n + 4v_{n-1} + 4v_{n-2} = 0$  donde  $v_1 = 0, v_2 = 1$ . [6]
- (b) Utilice la inducción fuerte para demostrar que la solución de la relación de recurrencia  $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$  donde  $u_1 = 0, u_2 = 1$  viene dada por  $u_n = 2^{n-2}(n-1)$ . [8]
- (c) Halle una expresión simplificada para  $u_n + v_n$  sabiendo que
  - (i)  $n$  es par.
  - (ii)  $n$  es impar. [3]

5. [Puntuación máxima: 12]

El grafo simple conexo  $G$  tiene  $e$  aristas y  $v$  vértices, donde  $v \geq 3$ .

- (a) Muestre que el número de aristas que tiene  $G'$ , el complementario de  $G$ , es  $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v - e$ . [2]

Sabiendo que tanto  $G$  como  $G'$  son planarios y conexos,

- (b) muestre que la suma del número de caras que tiene  $G$  y el número de caras que tiene  $G'$  es independiente de  $e$ ; [3]
- (c) muestre que  $v^2 - 13v + 24 \leq 0$  y, a partir de lo anterior, determine el máximo valor posible de  $v$ . [7]